Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 547538 16 dicembre 2025

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	c
2	c
3	c
4	b
5	a
6	a
7	b
8	b
9	d
10	d

1. $\lim_{x \to 0^+} (\sin x)^{\log(1+x)} =$

(a) $\frac{1}{e}$ (b) 0 ► (c) 1 (d) $+\infty$

Soluzione:

$$\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\log(1+x)}$$

$$(\sin x)^{\log(1+x)} = e^{\log(1+x)\cdot\log(\sin x)} = e^{\log(1+x)\log\left(\frac{\sin x}{x}\cdot x\right)}$$

$$= e^{\log(1+x)\left[\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)+\log x\right]} = e^{\log(1+x)\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)} \cdot e^{\log(1+x)\log x}$$

Osserviamo ora che $\lim_{x\to 0^+} e^{\log(1+x)\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)} = e^{(\log 1)(\log 1)} = e^0 = 1$

e che $\lim_{x\to 0^+} e^{\log(1+x)\log x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\log(1+x)}{x}\cdot(x\log x)} =$

$= e^{1\cdot 0} = e^0 = 1$

Quindi $\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\log(1+x)} = 1.$

2. La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (\log x)^2 - \sin x$

(a) ha sia massimo che minimo

(b) ha massimo ma non ha minimo

▶ (c) ha minimo ma non ha massimo

(d) non ha né massimo né minimo

Soluzione:

$f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (\log x)^2 - \sin x$

Osserviamo che f è continua in tutto il suo dominio.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = (-\infty)^2 -$ limitata $= +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = (+\infty)^2 -$ limitata $= +\infty$

Dal teorema di Weierstrass generalizzato segue che f ha minimo ma non ha massimo.

3. $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} x \cos x \, dx =$

(a) $+\infty$

(b) π

▶ (c) 0

(d) non esiste

Soluzione:

Fissiamo $a>0$ e calcoliamo $\displaystyle\int_{-a}^{a} x\cos x \, dx$.

Osserviamo che la funzione $x\cos x$ è dispari e che l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto a 0 quindi

$$\int_{-a}^{a} x\cos x \, dx = 0 \quad \forall a>0.$$

Ne segue che

$$\lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} x\cos x \, dx = 0.$$

4. La funzione $F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $F(x)=\displaystyle\int_{x^2}^{0}(t^2-1)^2\,dt$

(a) non ha né massimo né minimo

► (b) ha massimo ma non ha minimo

(c) ha sia massimo che minimo

(d) ha minimo ma non ha massimo

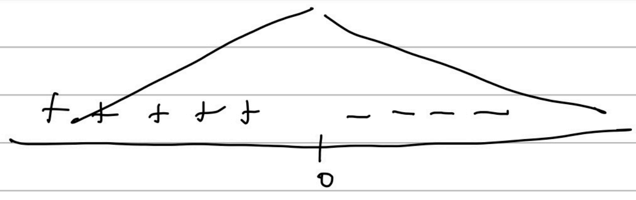
Soluzione:

$$F(x)=\int_{x^2}^{0}(t^2-1)^2\,dt$$

Deriviamo F utilizzando la formula di derivazione per integrali con estremi variabili.

$$F'(x) = -\left((x^2)^2-1\right)^2 2x = -(x^4-1)^2\, 2x$$

Osserviamo che $F'(x)\geq 0 \iff x\leq 0$ quindi il segno di F' è il seguente



di conseguenza F ha massimo ma non ha minimo.

5. La funzione $F : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_1^x \frac{t^2+2}{t(t+1)^2}\, dt$

► (a) non è limitata né inferiormente né superiormente (b) è limitata superiormente ma non inferiormente
(c) è limitata sia superiormente che inferiormente (d) è limitata inferiormente ma non superiormente

Soluzione:

La funzione F è la primitiva di una funzione continua quindi F è derivabile (quindi anche continua).

$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{x^2+2}{x(x+1)^2}\, dx$. Studiamo l'integrale improprio.

Scegliamo la funzione di confronto $g(x) = \frac{1}{x}$ e osserviamo che $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2}{x(x+1)^2} \cdot \frac{1}{g} = 1$. Dato che $\int_1^{+\infty} g(x)\, dx = +\infty$, dal criterio del confronto asintotico segue che $\int_1^{+\infty} \frac{x^2+2}{x(x+1)^2}\, dx = +\infty$

Quindi F non è limitata superiormente.

$\lim_{x\to0^+} F(x) = \int_1^0 \frac{x^2+2}{x(x+1)^2}\, dx = -\int_0^1 \frac{x^2+2}{x(x+1)^2}\, dx$

Scegliamo ancora $g(x) = \frac{1}{x}$ e osserviamo che $\lim_{x\to0^+} \frac{x^2+2}{x(x+1)^2} \cdot \frac{1}{g} = 2$. Poiché $\int_0^1 g(x) dx = +\infty$, dal criterio del confronto asintotico segue che $\int_0^1 \frac{x^2+2}{x(x+1)^2}\, dx = +\infty$, quindi $\lim_{x\to0^+} F(x) = -\infty$.

Quindi F non è limitata inferiormente.

6. $\int_0^{+\infty} 1 - e^{-\frac{1}{x}}\, dx$

► (a) diverge positivamente (b) converge (c) diverge negativamente (d) non esiste

Soluzione:

Sia $f(x) = 1 - e^{-\frac{1}{x}}$. Osserviamo che f è continua in $(0, +\infty)$.

Dato che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 - e^{-\frac{1}{0^+}} = 1 - e^{-\infty} = 1 - 0 = 1$,

e che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 - e^{-\frac{1}{+\infty}} = 1 - e^{0} = 1 - 1 = 0$,

la funzione f è limitata, pertanto è integrabile su ogni intervallo $[0, M]$ con $M > 0$. Vediamo l'andamento per $x \to +\infty$.

Dallo sviluppo di Taylor $e^t = 1 + t + o(t)$ per $t \to 0$, con il cambiamento di variabile $t = -\frac{1}{x}$ otteniamo

$$f(x) = 1 - e^{-\frac{1}{x}} = 1 - \left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Scegliamo $g(x) = \frac{1}{x}$ e otteniamo che $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Dato che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty$, per il criterio del confronto asintotico $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$. Poiché $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge abbiamo che $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$.

7. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3^n + \log(n^n)}{2^n + n^5}}$

(a) vale $+\infty$

► (b) è un numero reale maggiore di 1

(c) vale 0

(d) vale 1

Soluzione:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + \log(n^n)}{2^n + n^5}}$$

Osserviamo che

$$\frac{3^n + \log(n^n)}{2^n + n^5} = \frac{3^n + n\log n}{2^n + n^5} = \frac{3^n\left(1 + \frac{n\log n}{3^n}\right)}{2^n\left(1 + \frac{n^5}{2^n}\right)}$$

Per gerarchia di infiniti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\log n}{3^n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{2^n} = 0 \quad \text{quindi}$$

$$\sqrt[n]{\frac{3^n + \log(n^n)}{2^n + 5^n}} = \frac{3}{2}\sqrt[n]{\frac{1 + \frac{n\log n}{3^n}}{1 + \frac{n^5}{2^n}}} \longrightarrow \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

8. La serie $\sum_{n\geq 1} 1 + (-1)^n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

(a) converge ma non converge assolutamente

▶ (b) diverge positivamente

(c) converge assolutamente

(d) è indeterminata

Soluzione:

$$\sum_{n\geq 1} 1+(-1)^n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

Poniamo $a_n = 1+(-1)^n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

Consideriamo gli indici pari:

$$a_{2n} = 1+(-1)^{2n}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right) = 1+1-\frac{1}{4n^2} = 2-\frac{1}{4n^2} \longrightarrow 2$$

Per gli indici dispari abbiamo:

$$a_{2n+1} = 1+(-1)^{2n+1}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right) = \cancel{1}-\cancel{1}+\frac{1}{(2n+1)^2} \longrightarrow 0$$

Quindi la successione (a_n) non ha limite e la serie non converge. Osservando poi che $a_n \geq 0 \ \forall n\geq 1$ otteniamo che la serie diverge positivamente.

9. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{y^4+y^2x^2+y^2} =$

(a) $+\infty$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 0 ► (d) non esiste

Soluzione:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{y^4+y^2x^2+y^2}$$

Verifichiamo che il limite non esiste.

La funzione $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{y^4+y^2x^2+y^2} = \dfrac{x^4+y^4}{y^2(y^2+x^2+1)}$

non è definita per $y=0$.

Consideriamo la restrizione all'asse y, quindi sulla curva

$x=0$, $y=t$

$$f(0,t) = \frac{0+t^4}{t^2(t^2+0+1)} = \frac{t^2}{t^2+1} \to 0 \quad \text{per } t \to 0$$

Consideriamo ora la restrizione sulla parabola $y=x^2$

quindi $x=t$, $y=t^2$

$$f(t,t^2) = \frac{t^4+t^8}{t^4(t^4+t^2+1)} = \frac{\cancel{t^4}(1+t^4)}{\cancel{t^4}(t^4+t^2+1)} \to 1 \quad \text{per } t \to 0.$$

Quindi il limite non esiste.

10. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^4\left(\log(2x^2+2y^2)+1\right) =$

(a) $-\infty$ (b) non esiste (c) $+\infty$ ► (d) 0

Soluzione:

scriviamo la funzione in coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}$$

$$g(\rho,\vartheta) = f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta) = \rho^4\cos^4\vartheta\left(\log\left(2\rho^2\cos^2\vartheta + 2\rho^2\sin^2\vartheta\right) + 1\right) =$$

$$= \rho^4\cos^4\vartheta\left(\log(2\rho^2) + 1\right)$$

dimostriamo che la funzione tende a $\emptyset$.

$$|g(\rho,\vartheta) - 0| = |\rho^4\cos^4\vartheta(\log(2\rho^2)+1)| \leq \rho^4|\log(2\rho^2)+1| =$$

$$= \rho^4|\log 2 + 2\log\rho + 1| \leq \rho^4(1+\log 2) + 2\rho^4|\log\rho| \to 0$$

dove abbiamo utilizzato il limite notevole

$$\lim_{\rho\to 0^+} \rho\log\rho = 0.$$

codice 547538

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 573185 16 dicembre 2025

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	c
2	a
3	d
4	a
5	b
6	c
7	d
8	b
9	b
10	a

1. $\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\log(1+x)} =$

(a) 0 (b) $+\infty$ ► (c) 1 (d) $\frac{1}{e}$

Soluzione:

$$\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\log(1+x)}$$

$$(\sin x)^{\log(1+x)} = e^{\log(1+x)\cdot\log(\sin x)} = e^{\log(1+x)\log\left(\frac{\sin x}{x}\cdot x\right)}$$

$$= e^{\log(1+x)\left[\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)+\log x\right]} = e^{\log(1+x)\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)} \cdot e^{\log(1+x)\log x}$$

Osserviamo ora che $\lim_{x\to 0^+} e^{\log(1+x)\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)} = e^{(\log 1)(\log 1)} = e^0 = 1$

e che $\lim_{x\to 0^+} e^{\log(1+x)\log x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\log(1+x)}{x}\cdot(x\log x)} =$

$= e^{1\cdot 0} = e^0 = 1$

Quindi $\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\log(1+x)} = 1.$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x + x - 1}{e^{\sin x} - \sin x - 1} =$

► (a) $+\infty$ (b) 0 (c) 2 (d) non esiste

Soluzione:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x + x - 1}{e^{\sin x} - \sin x - 1}$$

Utilizziamo gli sviluppi di Taylor

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $\sin x = x + o(x^2)$, per $x \to 0$.

componendo i due sviluppi otteniamo che

$$e^{\sin x} = e^{x + o(x^2)} = 1 + x + o(x^2) + \frac{(x + o(x^2))^2}{2} + o\left((x + o(x^2))^2\right) =$$

$$= 1 + x + o(x^2) + \frac{x^2}{2} + o(x^3) + o(x^2) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Quindi

$$\frac{e^x + x - 1}{e^{\sin x} - \sin x - 1} = \frac{\cancel{1} + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) + x \cancel{- 1}}{\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - (\cancel{x} + o(x^2)) \cancel{- 1}} =$$

$$= \frac{2x + o(x)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{2 + o(1)}{\frac{x}{2} + o(x)} \to \frac{2}{0^+} = +\infty \quad \text{per } x \to 0^+.$$

3. $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} x \cos x \, dx =$

(a) $+\infty$ (b) non esiste (c) π ► (d) 0

Soluzione:

Fissiamo $a > 0$ e calcoliamo $\displaystyle\int_{-a}^{a} x \cos x \, dx$.

Osserviamo che la funzione $x \cos x$ è dispari e che l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto a 0 quindi

$\displaystyle\int_{-a}^{a} x \cos x \, dx = 0 \quad \forall a > 0$. Ne segue che

$$\lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} x \cos x \, dx = 0.$$

4. Sia $G(x) = \int_0^{x^3} \frac{e^t}{1+e^t}\, dt$. Allora

► (a) $x = 0$ non è né punto di massimo né punto di minimo locale per G

(b) $G(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

(c) $G'(x) = \dfrac{e^{x^3}}{1+e^{x^3}}$

(d) G è limitata in $\mathbb{R}$

Soluzione:

$$G(x) = \int_0^{x^3} \frac{e^t}{1+e^t}\, dt$$

segno di G'

$$G'(x) = \frac{e^{x^3}}{1+e^{x^3}} \cdot 3x^2 > 0 \quad \forall\, x \neq 0$$

$+ + + + \quad + + + + +$

0

quindi G è strettamente crescente in tutto $\mathbb{R}$.
Ne segue che G non ha punti di massimo o di minimo locali.

5. La funzione $F : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_1^x \frac{t^2+2}{t(t+1)^2}\, dt$

(a) è limitata inferiormente ma non superiormente

► (b) non è limitata né inferiormente né superiormente

(c) è limitata sia superiormente che inferiormente

(d) è limitata superiormente ma non inferiormente

Soluzione:

La funzione F è la primitiva di una funzione continua quindi F è derivabile (quindi anche continua).

$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{x^2+2}{x(x+1)^2} dx$. Studiamo l'integrale improprio.

Scegliamo la funzione di confronto $g(x) = \frac{1}{x}$ e osserviamo che

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+2}{x(x+1)^2} \cdot \frac{1}{g} = 1$. Dato che $\int_1^{+\infty} g(x)\, dx = +\infty$, dal criterio del confronto asintotico segue che $\int_1^{+\infty} \frac{x^2+2}{x(x+1)^2} dx = +\infty$

Quindi F non è limitata superiormente.

$\lim_{x \to 0^+} F(x) = \int_1^{0} \frac{x^2+2}{x(x+1)^2} dx = - \int_0^{1} \frac{x^2+2}{x(x+1)^2} dx$

Scegliamo ancora $g(x) = \frac{1}{x}$ e osserviamo che

$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2+2}{x(x+1)^2} \cdot \frac{1}{g} = 2$. Poiché $\int_0^{1} g(x) dx = +\infty$,

dal criterio del confronto asintotico segue che

$\int_0^1 \frac{x^2+2}{x(x+1)^2} dx = +\infty$, quindi $\lim_{x \to 0^+} F(x) = -\infty$.

Quindi F non è limitata inferiormente.

6. Sia $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{(e^{x^2}+1)(1-\cos\sqrt{x})(1+\sin x)}{(e^{x^2}-1)(2+\sin x)(1+x^2)}$. Allora

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ non esiste

(b) $\displaystyle\int_0^{1} f(x)\,dx$ converge

► (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$

(d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$

Soluzione:

$$f(x) = \frac{(e^{x^2}+1)(1-\cos\sqrt{x})(1+\sin x)}{(e^{x^2}-1)(2+\sin x)(1+x^2)} \qquad x \in (0,+\infty).$$

osserviamo che $f(x) \geq 0 \ \forall x \in (0,+\infty)$ quindi $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ esiste sicuramente (finito o infinito).

Per $x \to 0^+$
$$f(x) = \underbrace{\frac{(e^{x^2}+1)(1+\sin x)}{(2+\sin x)(1+x^2)}}_{\to \frac{2}{2}} \cdot \frac{\cancel{1}-(\cancel{1}-\frac{1}{2}(x^{1/2})^2+o((x^{1/2})^3))}{(\cancel{1}+x^2+o(x^2)-\cancel{1})} =$$

$$= (1+o(1)) \cdot \frac{\frac{1}{2}x + o(x^{3/2})}{x^2+o(x^2)} = (1+o(1)) \cdot \frac{\frac{1}{2}+o(x^{1/2})}{x(1+o(1))} =$$

$$= (1+o(1)) \frac{\frac{1}{2}+o(x^{1/2})}{1+o(1)} \boxed{\cdot \frac{1}{x}}$$

Utilizziamo il confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} (1+o(1)) \frac{\frac{1}{2}+o(x^{1/2})}{1+o(1)} \cdot \frac{1}{x} \cdot x = \frac{1}{2}$$

Dato che $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = +\infty$ segue che $\int_0^1 f(x)\,dx = +\infty$

Non serve quindi controllare $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ (dato che $f(x) \geq 0$) per concludere che

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty.$$

7. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3^n+\log(n^n)}{2^n+n^5}}$

(a) vale $+\infty$

(b) vale 1

(c) vale 0

► (d) è un numero reale maggiore di 1

Soluzione:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + \log(n^n)}{2^n + n^5}}$$

Osserviamo che

$$\frac{3^n + \log(n^n)}{2^n + n^5} = \frac{3^n + n\log n}{2^n + n^5} = \frac{3^n\left(1 + \frac{n\log n}{3^n}\right)}{2^n\left(1 + \frac{n^5}{2^n}\right)}$$

Per gerarchia di infiniti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\log n}{3^n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{2^n} = 0 \quad \text{quindi}$$

$$\sqrt[n]{\frac{3^n + \log(n^n)}{2^n + 5^n}} = \frac{3}{2}\sqrt[n]{\frac{1 + \frac{n\log n}{3^n}}{1 + \frac{n^5}{2^n}}} \longrightarrow \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

8. La serie $\sum_{n\geq 1} 1 + (-1)^n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

(a) è indeterminata

► (b) diverge positivamente

(c) converge ma non converge assolutamente

(d) converge assolutamente

Soluzione:

$$\sum_{n\geq 1} 1+(-1)^n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

Poniamo $a_n = 1+(-1)^n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

Consideriamo gli indici pari:

$$a_{2n} = 1+(-1)^{2n}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right) = 1+1-\frac{1}{4n^2} = 2-\frac{1}{4n^2} \longrightarrow 2$$

Per gli indici dispari abbiamo:

$$a_{2n+1} = 1+(-1)^{2n+1}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right) = \cancel{1}-\cancel{1}+\frac{1}{(2n+1)^2} \longrightarrow 0$$

Quindi la successione (a_n) non ha limite e la serie non converge. Osservando poi che $a_n \geq 0$ $\forall n \geq 1$ otteniamo che la serie diverge positivamente.

9. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{y^4+y^2x^2+y^2} =$

(a) $\frac{1}{2}$ ► (b) non esiste (c) $+\infty$ (d) 0

Soluzione:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{y^4+y^2x^2+y^2}$$

Verifichiamo che il limite non esiste.

La funzione $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{y^4+y^2x^2+y^2} = \dfrac{x^4+y^4}{y^2(y^2+x^2+1)}$

non è definita per $y=0$.

Consideriamo la restrizione all'asse y, quindi sulla curva

$x=0$, $y=t$

$$f(0,t) = \frac{0+t^4}{t^2(t^2+0+1)} = \frac{t^2}{t^2+1} \to 0 \quad \text{per } t=0$$

Consideriamo ora la restrizione sulla parabola $y=x^2$

quindi $x=t$, $y=t^2$

$$f(t,t^2) = \frac{t^4+t^8}{t^4(t^4+t^2+1)} = \frac{\cancel{t^4}(1+t^4)}{\cancel{t^4}(t^4+t^2+1)} \to 1 \quad \text{per } t=0.$$

Quindi il limite non esiste.

10. I punti stazionari della funzione $f(x,y) = e^{-x}(y^3 - 2xy)$ sono

► (a) tre (b) nessuno (c) uno (d) due

Soluzione:

$f(x,y) = e^{-x}(y^3 - 2xy)$

$f_x = -e^{-x}(y^3 - 2xy) + e^{-x}(-2y) = e^{-x}(-y^3 + 2xy - 2y) =$

$= e^{-x} \cdot y(-y^2 + 2x - 2)$

$f_y = e^{-x}(3y^2 - 2x)$

$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} e^{-x} y(-y^2 + 2x - 2) = 0 \\ e^{-x}(3y^2 - 2x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y(-y^2 + 2x - 2) = 0 \\ 3y^2 - 2x = 0 \end{cases}$

Dalla 2^a equazione otteniamo $3y^2 = 2x$. Sostituendo nella 1^a otteniamo

$y(-y^2 + 3y^2 - 2) = 0 \iff y(2y^2 - 2) = 0 \iff y = 0 \vee y^2 = 1$

Se $y = 0$, da $3y^2 = 2x$ otteniamo $x = 0$, quindi il punto $\boxed{(0,0)}$

Se $y = 1$, $3y^2 = 2x \Rightarrow 3 = 2x \Rightarrow x = \frac{3}{2}$, quindi $\boxed{\left(\frac{3}{2}, 1\right)}$

Se $y = -1$, $3y^2 = 2x \Rightarrow 3 = 2x \Rightarrow x = \frac{3}{2}$, quindi $\boxed{\left(\frac{3}{2}, -1\right)}$.

La funzione ha quindi 3 punti stazionari.

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 94091 16 dicembre 2025

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	d
2	a
3	a
4	b
5	c
6	a
7	b
8	d
9	d
10	c

1. $\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\log(1+x)} =$

(a) $+\infty$ (b) 0 (c) $\frac{1}{e}$ ► (d) 1

Soluzione:

$$\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\log(1+x)}$$

$$(\sin x)^{\log(1+x)} = e^{\log(1+x)\cdot\log(\sin x)} = e^{\log(1+x)\log\left(\frac{\sin x}{x}\cdot x\right)}$$

$$= e^{\log(1+x)\left[\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)+\log x\right]} = e^{\log(1+x)\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)} \cdot e^{\log(1+x)\log x}$$

Osserviamo ora che $\lim_{x\to 0^+} e^{\log(1+x)\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)} = e^{(\log 1)(\log 1)} = e^{0} = 1$

e che $\lim_{x\to 0^+} e^{\log(1+x)\log x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\log(1+x)}{x}\cdot(x\log x)} =$

$= e^{1\cdot 0} = e^{0} = 1$

Quindi $\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\log(1+x)} = 1.$

2. La derivata della funzione $f(x) = \cos(\sqrt{\tan x})$ è

▶ (a) $\dfrac{-\sin(\sqrt{\tan x})}{2\sqrt{\tan x}(\cos x)^2}$ (b) $\dfrac{-\sin(\sqrt{\tan x})}{2\sqrt{\tan x}}$ (c) $-\sin(\sqrt{\tan x})$ (d) $\dfrac{-\sin(\sqrt{\tan x})}{2\sqrt{x}(\cos x)^2}$

Soluzione:

$$f(x) = \cos\left(\sqrt{\operatorname{tg} x}\right)$$

$$f'(x) = -\sin\left(\sqrt{\operatorname{tg} x}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg} x}}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$

ricordando che $D(\operatorname{tg} x) = D\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} =$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

3. $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} x\cos x\,dx =$

▶ (a) 0 (b) non esiste (c) π (d) $+\infty$

Soluzione:

Fissiamo $a>0$ e calcoliamo $\int_{-a}^{a} x\cos x \, dx$.

Osserviamo che la funzione $x\cos x$ è dispari e che l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto a 0 quindi $\int_{-a}^{a} x\cos x \, dx = 0$ $\forall a>0$. Ne segue che

$$\lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} x\cos x \, dx = 0.$$

4. $\displaystyle\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{\tan x}{\cos x}\, dx =$

(a) $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ ▶ (b) $\sqrt{2}-1$ (c) $-\sqrt{2}$ (d) $-\frac{6+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

Soluzione:

$$\int \frac{tg\, x}{\cos x}\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx$$

sostituzione $\cos x = t$

$\frac{dt}{dx} = -\sin x$, $\sin dx = -dt$

$$= \int \frac{-dt}{t^2} = \frac{1}{t} + c = \frac{1}{\cos x} + c.$$

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{tg\, x}{\cos x}\, dx = \left[\frac{1}{\cos x}\right]_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} = \frac{1}{\cos \pi} - \frac{1}{\cos\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{-1} - \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1 + \frac{2}{\sqrt{2}} =$$

$$= -1+\sqrt{2}$$

5. La funzione $F : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \int_1^x \frac{t^2+2}{t(t+1)^2}\, dt$

(a) è limitata inferiormente ma non superiormente

(b) è limitata sia superiormente che inferiormente

► (c) non è limitata né inferiormente né superiormente

(d) è limitata superiormente ma non inferiormente

Soluzione:

La funzione F è la primitiva di una funzione continua quindi F è derivabile (quindi anche continua).

$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{x^2+2}{x(x+1)^2}\, dx$. Studiamo l'integrale improprio.

Scegliamo la funzione di confronto $g(x) = \frac{1}{x}$ e osserviamo che $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2}{x(x+1)^2} \cdot \frac{1}{g} = 1$. Dato che $\int_1^{+\infty} g(x)\, dx = +\infty$, dal criterio del confronto asintotico segue che $\int_1^{+\infty} \frac{x^2+2}{x(x+1)^2}\, dx = +\infty$

Quindi F non è limitata superiormente.

$\lim_{x\to0^+} F(x) = \int_1^0 \frac{x^2+2}{x(x+1)^2}\, dx = -\int_0^1 \frac{x^2+2}{x(x+1)^2}\, dx$

Scegliamo ancora $g(x) = \frac{1}{x}$ e osserviamo che $\lim_{x\to0^+} \frac{x^2+2}{x(x+1)^2} \cdot \frac{1}{g} = 2$. Poiché $\int_0^1 g(x)\, dx = +\infty$, dal criterio del confronto asintotico segue che $\int_0^1 \frac{x^2+2}{x(x+1)^2}\, dx = +\infty$, quindi $\lim_{x\to0^+} F(x) = -\infty$.

Quindi F non è limitata inferiormente.

6. L'integrale $\int_0^{+\infty} e^{-1/x^2} - 1\, dx$

► (a) converge

(b) non esiste

(c) diverge negativamente

(d) diverge positivamente

Soluzione:

$$\int_0^{+\infty} e^{-1/x^2} - 1 \, dx$$

$f(x) = e^{-1/x^2} - 1$ non è definita per $x = 0$ ma

$\lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x^2}} - 1 = e^{-\infty} - 1 = -1$ quindi f è integrabile

secondo Riemann in $(0,1]$. $\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx$ converge.

Se $x \to +\infty$ $\quad e^{-\frac{1}{x^2}} - 1 = \left(1 - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) - 1 = -\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}\left(-1 + o(1)\right)$

Scegliendo $g(x) = \frac{1}{x^2}$, osservando che $-f(x) \geq 0$ $\forall x \in (0, +\infty)$

e che $\lim_{x \to \infty} \frac{-f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2}(-1 + o(1)) \cdot x^2 = 1$ possiamo applicare

il confronto asintotico ottenendo che $\int_1^{+\infty} -f(x)\, dx$ converge,

dato che $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge.

Ne segue che $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge quindi anche

$\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge.

7. $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3^n + \log(n^n)}{2^n + n^5}}$

(a) vale 0

► (b) è un numero reale maggiore di 1

(c) vale 1

(d) vale $+\infty$

Soluzione:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + \log(n^n)}{2^n + n^5}}$$

Osserviamo che

$$\frac{3^n + \log(n^n)}{2^n + n^5} = \frac{3^n + n\log n}{2^n + n^5} = \frac{3^n\left(1 + \frac{n\log n}{3^n}\right)}{2^n\left(1 + \frac{n^5}{2^n}\right)}$$

Per gerarchia di infiniti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\log n}{3^n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{2^n} = 0 \quad \text{quindi}$$

$$\sqrt[n]{\frac{3^n + \log(n^n)}{2^n + 5^n}} = \frac{3}{2}\sqrt[n]{\frac{1 + \frac{n\log n}{3^n}}{1 + \frac{n^5}{2^n}}} \longrightarrow \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

8. La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} 1 + (-1)^n\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

(a) converge assolutamente

(b) è indeterminata

(c) converge ma non converge assolutamente

► (d) diverge positivamente

Soluzione:

$$\sum_{n\geq 1} 1+(-1)^n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

Poniamo $a_n = 1+(-1)^n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

Consideriamo gli indici pari:

$$a_{2n} = 1+(-1)^{2n}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right) = 1+1-\frac{1}{4n^2} = 2-\frac{1}{4n^2} \longrightarrow 2$$

Per gli indici dispari abbiamo:

$$a_{2n+1} = 1+(-1)^{2n+1}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right) = \cancel{1}\cancel{-1}+\frac{1}{(2n+1)^2} \longrightarrow 0$$

Quindi la successione (a_n) non ha limite e la serie non converge. Osservando poi che $a_n \geq 0$ $\forall n \geq 1$ otteniamo che la serie diverge positivamente.

9. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{y^4+y^2x^2+y^2} =$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $+\infty$ (c) 0 ► (d) non esiste

Soluzione:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{y^4+y^2x^2+y^2}$$

Verifichiamo che il limite non esiste.

La funzione $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{y^4+y^2x^2+y^2} = \dfrac{x^4+y^4}{y^2(y^2+x^2+1)}$

non è definita per $y=0$.

Consideriamo la restrizione all'asse y, quindi sulla curva

$x=0$, $y=t$

$$f(0,t) = \frac{0+t^4}{t^2(t^2+0+1)} = \frac{t^2}{t^2+1} \to 0 \quad \text{per } t=0$$

Consideriamo ora la restrizione sulla parabola $y=x^2$

quindi $x=t$, $y=t^2$

$$f(t,t^2) = \frac{t^4+t^8}{t^4(t^4+t^2+1)} = \frac{\cancel{t^4}(1+t^4)}{\cancel{t^4}(t^4+t^2+1)} \to 1 \quad \text{per } t=0.$$

Quindi il limite non esiste.

10. Sia $f(x,y) = \log(9y - 3x - 3)$. Per quale delle seguenti direzioni v risulta $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,1) = 0$?

(a) $v = (1,-3)$ (b) $v = (1,1)$ ► (c) $v = (3,1)$ (d) $v = (3,0)$

Soluzione:

$$f(x,y) = \log(9y-3x-3)$$

$$f_x = \frac{-3}{9y-3x-3} \quad , \quad f_y = \frac{9}{9y-3x-3}$$

$$f_x(1,1) = \frac{-3}{9-3-3} = \frac{-3}{3} = -1 \quad , \quad f_y(1,1) = \frac{9}{9-3-3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

è immediato verificare che $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -3+3 = 0$, quindi

se $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot v = 0$.

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 306530 16 dicembre 2025

Ogni domanda ha una risposta giusta e tre sbagliate. Inserire la lettera corrispondente al risultato corretto nel riquadro. Ogni risposta esatta vale 3, ogni risposta sbagliata vale -1, ogni risposta mancante vale 0.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	c
2	c
3	d
4	c
5	c
6	b
7	d
8	d
9	b
10	c

1. $\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\log(1+x)} =$

(a) 0 (b) $\frac{1}{e}$ ► (c) 1 (d) $+\infty$

Soluzione:

$$\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\log(1+x)}$$

$$(\sin x)^{\log(1+x)} = e^{\log(1+x)\cdot\log(\sin x)} = e^{\log(1+x)\log\left(\frac{\sin x}{x}\cdot x\right)}$$

$$= e^{\lg(1+x)\left[\lg\left(\frac{\sin x}{x}\right)+\lg x\right]} = e^{\log(1+x)\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}\cdot e^{\log(1+x)\log x}$$

Osserviamo ora che $\lim_{x\to 0^+} e^{\log(1+x)\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)} = e^{(\log 1)(\log 1)} = e^0 = 1$

e che $\lim_{x\to 0^+} e^{\lg(1+x)\lg x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\log(1+x)}{x}\cdot(x\log x)} =$

$= e^{1\cdot 0} = e^0 = 1$

Quindi $\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\log(1+x)} = 1.$

2. Dire quale dei seguenti insiemi è superiormente limitato:

(a) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 > 4\}$

(b) $\{y \in \mathbb{R} : y = e^{2n},\ n \in \mathbb{N}\}$

► (c) $\{x \in \mathbb{R} :\ \arctan x < 1\}$

(d) $\{y \in \mathbb{R} : y = -\log x,\ x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$

Soluzione:

Consideriamo l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} : \text{arctg}\, x < 1\}$.

Dato che la funzione arcotangente è strettamente crescente

$$\text{arctg}\, x < 1 \iff x < \text{tg}\, 1$$

quindi $A = (-\infty, \text{tg}\, 1)$ che è superiormente limitato.

3. $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} x \cos x \, dx =$

(a) non esiste

(b) $+\infty$

(c) π

► (d) 0

Soluzione:

Fissiamo $a>0$ e calcoliamo $\int_{-a}^{a} x\cos x\,dx$.

Osserviamo che la funzione $x\cos x$ è dispari e che l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto a 0 quindi $\int_{-a}^{a} x\cos x\,dx = 0$ $\forall a>0$. Ne segue che

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} x\cos x\,dx = 0.$$

4. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\sin(x^2)\,dx =$

(a) -1 (b) $\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$ ► (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

Soluzione:

Calcoliamo una primitiva con la sostituzione

$x^2 = t$, $\frac{dt}{dx} = 2x$, $x\,dx = \frac{dt}{2}$

$$\int x\sin(x^2)\,dx = \int \sin t\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}(-\cos t)+c = -\frac{1}{2}\cos(x^2)+c$$

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} x\sin(x^2)\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos(x^2)\right]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = -\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\cos 0 =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

5. La funzione $F:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $F(x)=\int_1^x \frac{t^2+2}{t(t+1)^2}\,dt$

(a) è limitata superiormente ma non inferiormente
(b) è limitata inferiormente ma non superiormente
► (c) non è limitata né inferiormente né superiormente
(d) è limitata sia superiormente che inferiormente

Soluzione:

La funzione F è la primitiva di una funzione continua quindi F è derivabile (quindi anche continua).

$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{x^2+2}{x(x+1)^2}\,dx$. Studiamo l'integrale improprio.

Scegliamo la funzione di confronto $g(x)=\frac{1}{x}$ e osserviamo che $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2}{x(x+1)^2}\cdot\frac{1}{g}=1$. Dato che $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx=+\infty$, dal criterio del confronto asintotico segue che $\int_1^{+\infty}\frac{x^2+2}{x(x+1)^2}\,dx=+\infty$

Quindi F non è limitata superiormente.

$\lim_{x\to0^+} F(x) = \int_1^{0} \frac{x^2+2}{x(x+1)^2}\,dx = -\int_0^{1} \frac{x^2+2}{x(x+1)^2}\,dx$

Scegliamo ancora $g(x)=\frac{1}{x}$ e osserviamo che $\lim_{x\to0^+}\frac{x^2+2}{x(x+1)^2}\cdot\frac{1}{g}=2$. Poiché $\int_0^1 g(x)\,dx=+\infty$, dal criterio del confronto asintotico segue che $\int_0^1\frac{x^2+2}{x(x+1)^2}\,dx=+\infty$, quindi $\lim_{x\to0^+}F(x)=-\infty$.

Quindi F non è limitata inferiormente.

6. $\int_0^{+\infty}\left(e^{\frac{x-1}{x+1}}-\frac{1}{e}\right)\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$

(a) diverge positivamente ► (b) converge (c) non esiste (d) diverge negativamente

Soluzione:

Per $x \to 0$

$$e^{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{1}{e} = e^{\frac{x-1}{x+1}} - e^{-1} = e^{-1}\left(e^{\frac{x-1}{x+1}+1} - 1\right) = e^{-1}\left(e^{\frac{x\cancel{-1}+x\cancel{+1}}{x+1}} - 1\right)$$

$$= e^{-1}\left(e^{\frac{2x}{x+1}} - 1\right) = e^{-1}\left(\cancel{1}+\frac{2x}{x+1} + o\left(\frac{2x}{x+1}\right) \cancel{-1}\right) =$$

$$= x e^{-1}\left(\frac{2}{x+1} + o\left(\frac{2}{x+1}\right)\right)$$

Scegliamo $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$ e otteniamo che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0^+} \cancel{x} e^{-1}\left(\frac{2}{x+1} + o\left(\frac{2}{x+1}\right)\right) \cdot \frac{1}{\cancel{x^{3/2}}} \cdot \cancel{x^{1/2}} = e^{-1} \cdot 2$$

Dato che $\int_0^1 g(x)\,dx$ converge, per il criterio del confronto asintotico, $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge, dove $f(x) = \left(e^{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{1}{e}\right) \cdot \frac{1}{x^{3/2}}$

Per $x \to +\infty$ $\lim_{x \to \infty} e^{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{1}{e} = e - \frac{1}{e}$

quindi scegliamo $h(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$ per ottenere

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{h(x)} = e - \frac{1}{e}$. Dato che $\int_1^{+\infty} h(x)\,dx$ converge, dal criterio del confronto asintotico, anche $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

Ne segue che $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

7. $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3^n + \log(n^n)}{2^n + n^5}}$

(a) vale 0

(b) vale 1

(c) vale $+\infty$

► (d) è un numero reale maggiore di 1

Soluzione:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + \log(n^n)}{2^n + n^5}}$$

Osserviamo che

$$\frac{3^n + \log(n^n)}{2^n + n^5} = \frac{3^n + n\log n}{2^n + n^5} = \frac{3^n\left(1 + \frac{n\log n}{3^n}\right)}{2^n\left(1 + \frac{n^5}{2^n}\right)}$$

Per gerarchia di infiniti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\log n}{3^n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{2^n} = 0 \quad \text{quindi}$$

$$\sqrt[n]{\frac{3^n + \log(n^n)}{2^n + 5^n}} = \frac{3}{2}\sqrt[n]{\frac{1 + \frac{n\log n}{3^n}}{1 + \frac{n^5}{2^n}}} \longrightarrow \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

8. La serie $\sum_{n\geq 1} 1 + (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

(a) è indeterminata

(b) converge ma non converge assolutamente

(c) converge assolutamente

► (d) diverge positivamente

Soluzione:

$$\sum_{n\geq 1} 1+(-1)^n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

Poniamo $a_n = 1+(-1)^n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

Consideriamo gli indici pari:

$$a_{2n} = 1+(-1)^{2n}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right) = 1+1-\frac{1}{4n^2} = 2-\frac{1}{4n^2} \to 2$$

Per gli indici dispari abbiamo:

$$a_{2n+1} = 1+(-1)^{2n+1}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right) = \cancel{1}\cancel{-1}+\frac{1}{(2n+1)^2} \to 0$$

Quindi la successione (a_n) non ha limite e la serie non converge. Osservando poi che $a_n \geq 0$ $\forall n\geq 1$ otteniamo che la serie diverge positivamente.

9. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{y^4+y^2x^2+y^2} =$

(a) 0 ► (b) non esiste (c) $\frac{1}{2}$ (d) $+\infty$

Soluzione:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{y^4+y^2x^2+y^2}$$

Verifichiamo che il limite non esiste.

La funzione $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^4}{y^4+y^2x^2+y^2} = \dfrac{x^4+y^4}{y^2(y^2+x^2+1)}$

non è definita per $y=0$.

Consideriamo la restrizione all'asse y, quindi sulla curva

$x=0$, $y=t$

$$f(0,t) = \frac{0+t^4}{t^2(t^2+0+1)} = \frac{t^2}{t^2+1} \longrightarrow 0 \quad \text{per } t=0$$

Consideriamo ora la restrizione sulla parabola $y=x^2$

quindi $x=t$, $y=t^2$

$$f(t,t^2) = \frac{t^4+t^8}{t^4(t^4+t^2+1)} = \frac{\cancel{t^4}(1+t^4)}{\cancel{t^4}(t^4+t^2+1)} \longrightarrow 1 \quad \text{per } t=0.$$

Quindi il limite non esiste.

10. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2} =$

(a) 1 (b) $+\infty$ ► (c) non esiste (d) 0

Soluzione:

Poniamo $f(x,y)=\frac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}$ e osserviamo che f è definita $\forall (x,y) \neq (0,0)$.

Consideriamo la curva $r(t)=(t,0)$ (asse x) e valutiamo il limite su tale curva:

$$\lim_{t\to 0} f(r(t)) = \lim_{t\to 0} f(t,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{|t\cdot 0|}}{t^2+0} = \lim_{t\to 0} 0 = 0.$$

Ora consideriamo $\alpha(t)=(t,t)$ e otteniamo

$$\lim_{t\to 0} f(\alpha(t)) = \lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{|t^2|}}{t^2+t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{2t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2|t|} = +\infty$$

Dato che i limiti sulle due curve sono diversi, il limite cercato non esiste.